SESSION DE 1977

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Les deux parties, I *et* II, *sont indépendantes*

I

1° Soient :

$\mathcal{E}$ un espace vectoriel euclidien de dimension 2.

$\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de $\mathcal{E}$.

f l'application linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ dont la matrice par rapport à $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{bmatrix} -2{,}08 & 1{,}44 \\ 1{,}44 & -2{,}92 \end{bmatrix}$$

Trouver une base $\mathcal{B}' = (\vec{I}, \vec{J})$ de $\mathcal{E}$, *orthonormée,* telle que la matrice A′ de f par rapport à $\mathcal{B}'$ soit diagonale.

($\vec{I}$ *et* $\vec{J}$ *seront définis par leurs composantes sur* $\mathcal{B}$, *et choisis tels que les deux composantes de* $\vec{I}$ *et la première composante de* $\vec{J}$ *soient positives. Les éléments de* A′ *sont des entiers*).

2° Soient :

$\mathcal{A}$ un espace affine euclidien, de dimension 2, dont $\mathcal{E}$ est l'espace vectoriel associé.

O un point de $\mathcal{A}$.

$\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{R}' = (O, \vec{I}, \vec{J})$ les repères de $\mathcal{A}$, d'origine O, associés respectivement à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Un point M est mobile dans $\mathcal{A}$. Soient $x(t)$ et $y(t)$ ses coordonnées par rapport à $\mathcal{R}$ à l'instant t.

.../...

On suppose que les fonctions x et y sont solutions du système :

$$(S)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -2{,}08\,x + 1{,}44\,y + 2{,}4\cos 2t \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = 1{,}44\,x - 2{,}92\,y + 1{,}8\cos 2t \end{cases}$$

a. Soient $X(t)$ et $Y(t)$ les coordonnées de M par rapport à $\mathcal{R}'$ à l'instant t.

Déduire de (S) deux équations différentielles du second ordre vérifiées l'une par X, l'autre par Y.

b. Trouver $X(t)$ et $Y(t)$ sachant que :

$$X(0) = 1 \qquad \frac{dX}{dt}(0) = 0 \qquad Y(0) = 0 \qquad \frac{dY}{dt}(0) = 2.$$

En déduire $x(t)$ et $y(t)$.

c. Construire la trajectoire de M par rapport à $\mathcal{R}'$ (Unités graphiques : 2 cm sur chaque axe).

d. Calculer, à l'instant $t = \dfrac{\pi}{6}$, les composantes sur $\mathcal{B}'$ des accélérations normale et tangentielle de M.

En déduire le rayon de courbure de la trajectoire au point $t = \dfrac{\pi}{6}$ et les coordonnées, par rapport à $\mathcal{R}'$, du centre de courbure de la trajectoire en ce point.

II

Les fonctions qui interviennent dans cette partie sont des fonctions numériques, définies sur $\mathbb{R}$ *ou sur* $\mathbb{R}^2$, *et qui vérifient toutes les conditions de continuité et de dérivabilité nécessaires à la validité des calculs, conditions que l'on ne demande pas d'expliciter.*

f étant une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, on considère la forme différentielle :

$$\omega = y(1 - x^2 + y^2)\,f(x, y)\,dx + x(1 + x^2 - y^2)\,f(x, y)\,dy.$$

1° *On suppose* $f(x, y) = 1$. Calculer l'intégrale de ω le long du chemin orienté $\overset{\frown}{AB}$, image du segment $[0, \pi]$ par l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$x = \cos t \qquad y = \sin t$$

On suppose maintenant f *quelconque.*

2° Écrire la relation (E), entre f et ses dérivées partielles, qui est nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction, définie sur $\mathbb{R}^2$, dont ω soit la différentielle.

3° *a.* Trouver une fonction φ, définie sur $\mathbb{R}$, telle que $\varphi(0) = 1$ et que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{cases} f(x, y) = \varphi(r) \\ r = x^2 + y^2 \end{cases}$$

vérifie (E).

b. Calculer

$$I = \int \frac{x^2 - \alpha^2}{(x^2 + \alpha^2)^2}\,dx$$

α étant un réel fixé.

En déduire, en prenant pour f la fonction trouvée à la question 3° *a.*, la fonction U qui a pour différentielle ω et qui vérifie $U(0, 0) = 0$.

4° Calculer

$$J = \iint_D U(x, y)\,dx\,dy$$

où D désigne l'ensemble des points (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que

$$\begin{cases} y \geqslant 0 \\ x^2 + y^2 - x \leqslant 0 \end{cases}$$

5° Trouver toutes les fonctions f qui vérifient (E) en utilisant le changement de variables :

$$u = \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \qquad v = \frac{xy}{x^2 + y^2 + 1}$$

6° Trouver, en utilisant certains des résultats de cette partie II, les solutions y de l'équation différentielle :

$$x(1 + x^2 - y^2)\frac{dy}{dx} + y(1 - x^2 + y^2) = 0.$$

FIN

X105X

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail